MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL).

DELLA ROTAZIONE DEI CORPI LIBERI

MEMORIA PRIMA

di FRANCESCO SIACCI professore a Torino,

presentata dal Socio A. GENOCCHI.

INTRODUZIONE

Il problema della rotazione di un corpo non sollecitato da forze intorno ad un punto fisso presenta due distinti aspetti. Sotto l'uno il problema richiede la determinazione analitica della posizione del mobile ad un'epoca qualunque: sotto l'altro il problema domanda una legge geometrica od una immagine, mediante cui la mente possa seguire la successione dei movimenti, come si vede o s'immagina per esempio la traiettoria di un proietto.

La prima questione, come tutti i problemi d'analisi, può essere risolta in più modi, sia per la condotta del calcolo sia per la varietà di maniere, onde la posizione di un corpo può essere definita. Raramente però si trova, che la soluzione più semplice dal punto di vista analitico lo sia del pari da quello geometrico: da ciò le trattazioni successive dei vari geometri; da ciò le soluzioni che diconsi più o meno dirette, più o meno complete. Eulero stabilì pel primo le equazioni differenziali del problema, e ne ridusse le integrazioni alle quadrature. Altrettanto fecero poco dopo D'Alembert e Lagrange. Gl'integrali incontrati da questi geometri costituivano una classe di trascendenti poco conosciuti a quel tempo, studiati poi e classificati da Legendre. E fu appunto Legendre che fece dipendere da integrali ellittici di prima e di terza specie il tempo, i tre coseni di direzione degli assi principali del corpo rispetto all'asse del piano invariabile, e la longitudine su questo piano di uno degli assi. Questa longitudine e quei tre coseni

furono poi ridotti a funzioni esplicite del tempo da Rueb, col sussidio dei progressi dovuti principalmente a Jacobi della teoria delle funzioni ellittiche *).

Quelle quattro quantità bastano a determinare la posizione del mobile ad ogni istante. Jacobi però a rendere più completa la soluzione del problema ricavò anche le funzioni del tempo che esprimono i sei coseni di direzione degli assi del corpo rispetto a due altre rette ortogonali, che girano equabilmente sul piano invariabile. E tali espressioni per la loro semplicità e pel loro carattere analogo a quello delle funzioni algebriche razionali, sono eminentemente adatte ad essere trattate col calcolo; circostanza tantoppiù importante, dice Jacobi, inquantochè queste quantità potranno e dovranno essere un elemento fondamentale della meccanica dei mobili a tre dimensioni. Nella stessa memoria si trovano anche le funzioni del tempo, che esprimono le longitudini dei tre assi principali, e dell'asse istantaneo di rotazione **).

Questi lavori forniscono il modo di determinare ad ogni istante la situazione del mobile, ma non spiegano come esso passi da una posizione ad un'altra. Fu nel 1834 che Poinsot rivelò la legge geometrica del succedersi delle posizioni del corpo: « Un ellissoide, fisso nel centro, ruzzola sopra un piano fisso, ed il « raggio di contatto rappresenta la sua velocità angolare ». Ecco la immagine della rotazione svelata da Poinsot. Le forme del corpo sono sparite: non rimane che un ellissoide, i cui assi, colla direzione dànno la direzione degli assi principali, colla lunghezza i reciproci dei raggi di girazione ***).

Gli elementi geometrici forniti da questa immagine al problema della rotazione, doveano renderne la soluzione analitica più lucida e più spedita di quella somministrata dalle pure risorse del calcolo. Il chiarissimo Professore Chelini pubblicò nel 1860 una *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti di Poinsot* ****), nella quale sviluppò in un modo più breve e più diretto ed assai più facile a seguirsi e a ritenersi la parte algebrica dell'opera di Poinsot; e ricercò inoltre, dietro gli splendidi concetti di questo geometra, ciò che forma la soluzione definitiva del problema, cioè la espressione dei nove coseni

*) *Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi acceleratrici sollicitati*, auct. Adolpho Stephano Rueb. Traiecti ad Rhenum 1834.

**) Jacobi — *Sur la rotation d'un corps* — (*Comptes Rendus* 1849; — *Matematische Werke*, Band II, Berlin 1851, pag. 139).

***) Il sunto della sua *Théorie nouvelle de la rotation des corps* fu presentato da Poinsot all'Accademia delle Scienze di Parigi il 19 maggio 1834. Fa quindi meraviglia, che Jacobi nel presentare alla stessa Accademia il sunto della sua memoria *sur la rotation d'un corps* il 30 luglio 1849, non faccia alcun cenno della scoperta di Poinsot. Non ne fa menzione neppure nelle *Matematische Werke*, Band II, ove la memoria è pubblicata per esteso. Questo secondo volume fu pubblicato nel 1851, cioè nello stesso anno in cui apparve per disteso nel giornale di Liouville la *Théorie nouvelle* del Poinsot.

****) *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*. Vol. X, 1860.

onde si determina ad ogni istante la posizione del mobile. Le formole trovate dal Prof. Chelini sono così semplici e derivano così spontaneamente dalle immagini sotto cui si presenta la rotazione, che fa quasi meraviglia, dice l'autore, come abbian potuto sin qui rimanersi nascoste ed inosservate. E l'analisi del Chelini è davvero così lucida come i concetti del suo illustre ispiratore. Veramente i nove coseni da esso trovati non si riferiscono ad assi fissi, nè ad assi, che come quelli di Jacobi equabilmente si muovano sul piano invariabile. Ma il passaggio dall'uno all'altro sistema si eseguisce agevolmente con alcuni sviluppi di puro calcolo attinente alla teorica delle funzioni ellittiche: sviluppi che si troveranno in una memoria che seguirà questa immediatamente.

Il Poinsot trasformando il problema della rotazione in un problema di pura cinematica ha creato un'infinità di enti geometrici intimamente connessi ai dati del problema. Tali sono la *poloide* e l'*erpoloide,* di cui la prima, giacente sull'ellissoide, si sviluppa sulla seconda giacente sul piano, nel ruzzolamento. Tali sono le tre curve generate dall'incontro del piano fisso coi tre assi prolungati dell'ellissoide. Tal'è la sezione diametrale di questo ottenuta con un piano parallelo al piano fisso.

A proposito di tale ellisse, il Poinsot finisce la sua opera dimostrando che la sua area è costante. Io mi proposi di determinare il movimento degli assi di cotesta sezione, e tal problema, di cui non mi consta si sia altri finora occupato, fu il punto di partenza di questa memoria.

Questo problema può risolversi in due maniere. Una prima soluzione può ottenersi da una proprietà delle linee di curvatura dell'ellissoide o dell'indicatrice di Dupin. Una seconda soluzione, ed è la prima che appaja, si ottiene calcolando la longitudine sul piano invariabile di una retta comunque legata all'ellissoide, e sommando poscia questa longitudine colla proiezione sul medesimo piano dell'angolo compreso fra quella retta ed uno degli assi della sezione.

La soluzione ottenuta nel primo modo forma l'oggetto di questa prima memoria. Ad un'altra memoria, che terrà dietro immediatamente a questa, riservo la seconda soluzione, la quale non mi sembra priva d'importanza perchè si presenta sotto forma ben diversa, e dà luogo ad un teorema di calcolo integrale, di cui sono casi particolari parecchi teoremi attinenti alla teorica degl'integrali ellittici. Nella stessa memoria indicherò pure la via facile e spedita, con cui dai nove coseni del Chelini si giunge ai nove coseni di Jacobi.

*

§ 1.

Generalità sulle coordinate ellittiche.

Immaginiamo un ellissoide fisso, che dirò centrale, ed un punto P nello spazio per cui passino tre superficie di second' ordine omofocali all' ellissoide. Le normali tirate dal centro sui piani tangenti in P alle tre superficie formano com'è noto una terna d'assi ortogonali, la quale può riuscire parallela ad un'altra terna qualsiasi, purchè si dia a P una posizione conveniente. Segue da ciò, che al movimento progressivo di un punto P si può far corrispondere per questo mezzo un moto rotatorio di un corpo, e reciprocamente. Noi chiameremo in seguito il punto P punto indicatore.

La posizione di P può essere determinata sia dalle coordinate cartesiane $x_1 x_2 x_3$ riferite agli assi stessi dell'ellissoide centrale, sia da funzioni di queste tre coordinate. Noi adotteremo oltre le coordinate $x_1\ x_2\ x_3$ anche le coordinate ellittiche $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, che sono funzioni di $x_1\ x_2\ x_3$, definite dalle seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{a_1-\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda_1}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda_1}&=1\\
\frac{x_1^2}{a_1-\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda_2}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda_2}&=1\\
\frac{x_1^2}{a_1-\lambda_3}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda_3}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda_3}&=1
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ossia dalle tre radici, che sono sempre reali, dell'equazione

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1\,.$$

Rappresentino $a_1\ a_2\ a_3$ i quadrati dei semiassi dell'ellissoide centrale; le tre equazioni (1) rappresenteranno appunto le tre superficie omofocali all'ellissoide, che si incontrano nel punto di coordinate $x_1\ x_2\ x_3$: e se λ_3 è la più piccola delle tre quantità $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, la terza delle (1) rappresenta un ellissoide, e le altre due gl'iperboloidi ad una e a due falde.

Dalle (1) discendono altre ben note, che io qui scriverò dovendole nel seguito richiamare spesso.

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2=\dfrac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\,,\quad x_2^2=\dfrac{(a_2-\lambda_1)(a_2-\lambda_2)(a_2-\lambda_3)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \\ \qquad\qquad x_3^2=\dfrac{(a_3-\lambda_1)(a_3-\lambda_2)(a_3-\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}+\dfrac{x_2^2}{(a_2-\lambda_1)(a_2-\lambda_2)}+\dfrac{x_3^2}{(a_3-\lambda_1)(a_3-\lambda_2)}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{(a_1-\lambda_1)^2}+\dfrac{x_2^2}{(a_2-\lambda_1)^2}+\dfrac{x_3^2}{(a_3-\lambda_1)^2}=\dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}=\dfrac{1}{m_1^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a_1+a_2+a_3-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\,. \quad (5)$$

Le quantità $m_1^2\ m_2^2\ m_3^2$ rappresentano i quadrati delle normali abbassate dal centro dell'ellissoide sui tre piani tangenti alle tre superficie omofocali nel punto $x_1\ x_2\ x_3$. Esse sono date per $a_1\ a_2\ a_3$, e $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, nello stesso modo che $x_1^2\ x_2^2\ x_3^2$ sono date per $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$ ed $a_1\ a_2\ a_3$. Potremo dunque trasformare le precedenti equazioni in altre, in cui le x siano cambiate nelle m, mutando solo le a nelle $-\lambda$, e viceversa, mantenendo gl'indici. Così avremo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m_1^2}{a_1-\lambda_1}+\dfrac{m_2^2}{a_1-\lambda_2}+\dfrac{m_3^2}{a_1-\lambda_3}=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1')$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1^2=\dfrac{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\,,\quad m_2^2=\dfrac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} \\ \qquad\qquad m_3^2=\dfrac{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{array}\right\} \quad (2')$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m_1^2}{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}+\dfrac{m_2^2}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)}+\dfrac{m_3^2}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (3')$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m_1^2}{(a_1-\lambda_1)^2}+\dfrac{m_2^2}{(a_1-\lambda_2)^2}+\dfrac{m_3^2}{(a_2-\lambda_3)^2}=\dfrac{1}{x_1^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (4')$$

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=a_1+a_2+a_3-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2\,. \quad (5')$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\,m_1 + b\,m_2 + c\,m_3 \\ x_2 &= a'\,m_1 + b'\,m_2 + c'\,m_3 \\ x_3 &= a''\,m_1 + b''\,m_2 + c''\,m_3 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Queste equazioni si riducono ad identità in grazia delle (1'), se si pone

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{m_1 x_1}{a_1 - \lambda_1} & b &= \frac{m_2 x_1}{a_1 - \lambda_2} & c &= \frac{m_3 x_1}{a_1 - \lambda_3} \\ a' &= \frac{m_1 x_2}{a_2 - \lambda_1} & b' &= \frac{m_2 x_2}{a_2 - \lambda_2} & c' &= \frac{m_3 x_2}{a_2 - \lambda_3} \\ a'' &= \frac{m_1 x_3}{a_3 - \lambda_1} & b'' &= \frac{m_2 x_3}{a_3 - \lambda_2} & c'' &= \frac{m_3 x_3}{a_3 - \lambda_3} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Le equazioni (3) e (4) somministrano inoltre

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 & a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 & b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0 & c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Dunque $a, b, c, a' \ldots$ definiti dalle (7) sono i nove coseni degli angoli formati dagli assi su cui sono contate le $x_1\, x_2\, x_3$, cogli assi su cui sono contate le $m_1\, m_2\, m_3$. Gli assi della prima terna saranno distinti da ora in poi con $Ox_1\; Ox_2\; Ox_3$ e corrispondono agli assi dell'ellissoide, gli assi della seconda terna saranno distinti con $Om_1\; Om_2\; Om_3$. Noi lasceremo per ora indeterminata la direzione in cui s'intendono presi gli assi positivi dell'una e dell'altra terna. Solo supporremo che le due terne siano sovrapponibili, il che importa le relazioni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &a = b'c'' - b''c' \quad , \quad b = c'a'' - c''a' \quad , \quad c = a'b'' - a''b' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Alle notissime relazioni fra le x e le λ, aggiungiamo il seguente teorema, che dev' essere pur noto: *Le sezioni centrali delle tre superficie* (λ_1) (λ_2) (λ_3) *rispettivamente perpendicolari agli assi* Om_1 Om_2 Om_3 *hanno per semiassi rispettivi le radici di*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_2-\lambda_1 & \text{e} & \lambda_3-\lambda_1 \\ \lambda_3-\lambda_2 & \text{e} & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_3 & \text{e} & \lambda_2-\lambda_3 . \end{array}$$

Onde si vede che mentre la sezione dell'ellissoide (λ_3) ha sempre naturalmente gli assi reali, delle altre due sezioni l'una ha un asse reale ed uno immaginario — e questo è il caso dell'iperboloide ad una falda — l'altra ha i due assi immaginarî — ed è il caso dell'iperboloide a due falde.

Sapendosi poi che l'intersezione di due superficie omofocali, costituisce su ciascuna delle due una linea di curvatura, ne viene per conseguenza che gli assi delle tre sezioni debbono coincidere con Om_2 e Om_3, con Om_3 e Om_1, con Om_1 ed Om_2 *).

§ 2.

Espressioni delle velocità angolari.

La terna Ox_1 Ox_2 Ox_3 essendo fissa, e la terna Om_1 Om_2 Om_3 essendo mobile, la velocità angolare di quest'ultima avrà per componenti secondo Om_1 Om_2 Om_3 le quantità P, Q, R definite dalle seguenti equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}dt = cdb + c'db' + c''db'' = -bdc - b'dc' - b''dc'' \\ \mathrm{Q}dt = adc + a'dc' + a''dc'' = -cda - c'da' - c''da'' \\ \mathrm{R}dt = bda + b'da' + b''da'' = -adb - a'db' - a''db'' \end{array}\right\}, \qquad (10)$$

e queste velocità debbono essere stimate in modo, che essendo positive, Om_2 tenda verso Om_3, Om_3 verso Om_1, Om_1 verso Om_2. Dalle (10) discendono quest'altre ben note:

$$\left.\begin{array}{lll} da = (b\mathrm{R} - c\mathrm{Q})dt & da' = (b'\mathrm{R} - c'\mathrm{Q})dt & da'' = (b''\mathrm{R} - c''\mathrm{Q})dt \\ db = (c\mathrm{P} - a\mathrm{R})dt & db' = (c'\mathrm{P} - a'\mathrm{R})dt & db'' = (c''\mathrm{P} - a''\mathrm{R})dt \\ dc = (a\mathrm{Q} - b\mathrm{P})dt & dc' = (a'\mathrm{Q} - b'\mathrm{P})dt & dc'' = (a''\mathrm{Q} - b''\mathrm{P})dt \end{array}\right\}. \qquad (11)$$

*) Cfr. Chasles — *Aperçu historique.*

Se l'ellissoide centrale, cioè la terna $Ox_1\ Ox_2\ Ox_3$ non è fissa, ma ha un movimento di rotazione intorno ad O, allora P, Q, R non rappresenteranno più le velocità angolari *assolute* della terna $Om_1\ Om_2\ Om_3$, ma le sue velocità angolari *relative* alla terna $Ox_1\ Ox_2\ Ox_3$. E se le velocità assolute di questa terna o dell'ellissoide, stimate secondo $Ox_1\ Ox_2\ Ox_3$ sono p, q, r, allora le velocità angolari assolute della terna $Om_1\ Om_2\ Om_3$ saranno

$$\left.\begin{aligned} P' &= P + ap + a'q + a''r \\ Q' &= Q + bp + b'q + b''r \\ R' &= R + cp + c'q + c''r \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Quando i coefficienti a, b, c, a'... hanno i valori (7), dalle (10) si ottengono le seguenti formole:

$$\left.\begin{aligned} 2Pdt &= \frac{m_2 m_3}{\lambda_2 - \lambda_3}\left(\frac{d\lambda_2}{m_2^2} + \frac{d\lambda_3}{m_3^2}\right) \\ 2Qdt &= \frac{m_3 m_1}{\lambda_3 - \lambda_1}\left(\frac{d\lambda_3}{m_3^2} + \frac{d\lambda_1}{m_1^2}\right) \\ 2Rdt &= \frac{m_1 m_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{m_1^2} + \frac{d\lambda_2}{m_2^2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

(Veggasi la *Nota* alla fine della memoria).

§ 3.

Il Teorema di Poinsot.

Il Poinsot ha dimostrato che il moto destato in un corpo dall'impulso di una coppia, riducesi al moto di un ellissoide legato ad esso invariabilmente, il quale rimane continuamente tangente ad un piano fisso (parallelo alla coppia), mentre gira attorno al raggio vettore di contatto con velocità eguale o proporzionale alla lunghezza di questo raggio.

Applichiamo dunque le precedenti equazioni a questo caso; prendiamo cioè per ellissoide centrale, l'ellissoide che sostituisce il corpo nel problema della rotazione, e per punto indicatore il punto di contatto col piano fisso. Per questo punto come per tutti i punti dell'ellissoide centrale si ha $\lambda_3 = 0$. E siccome l'asse

istantaneo coincide col raggio vettore del contatto, e la velocità angolare è da esso rappresentata, avremo

$$p = x_1 \qquad q = x_2 \qquad r = x_3 . \tag{14}$$

Considerando poi che il punto di contatto rimane sempre nello stesso piano, m_3 sarà costante, ed Om_3 sarà fisso; quindi ricordando che P′ e Q′ sono le velocità angolari assolute, secondo Om_1 ed Om_2, della terna $Om_1\, Om_2\, Om_3$, avremo $P' = Q' = 0$, ossia

$$0 = P + ap + a'q + a''r \quad , \quad 0 = Q + bp + b'q + b''r . \tag{15}$$

In grazia di queste due equazioni le (11) dell' ultima linea rappresentano le notissime equazioni differenziali Euleriane.

Infatti, essendo

$$c = a'b'' - a''b' \quad , \quad c' = a''b - ab'' \quad , \quad c'' = ab' - a'b , \tag{16}$$

sarà

$$aQ - bP = c'r - c''q \quad , \quad a'Q - b'P = c''p - cr \quad , \quad a''Q - b''P = cq - c'p , \tag{17}$$

e quindi per le (11)

$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q \quad , \quad \frac{dc'}{dt} = c''p - cr \quad , \quad \frac{dc''}{dt} = cq - c'p . \tag{18}$$

Ora essendo $\lambda_3 = 0$, avremo dalle (7)

$$c = \frac{m_3 x_1}{a_1} = \frac{m_3 p}{a_1} \quad , \quad c' = \frac{m_3 x_2}{a_2} = \frac{m_3 q}{a_2} \quad , \quad c'' = \frac{m_3 x_3}{a_3} = \frac{m_3 r}{a_3} , \tag{19}$$

e quindi

$$\frac{1}{a_1}\frac{dp}{dt} = qr\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \quad , \quad \frac{1}{a_2}\frac{dq}{dt} = rp\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1}\right) \quad , \quad \frac{1}{a_3}\frac{dr}{dt} = pq\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}\right) , \tag{20}$$

le quali sono le equazioni di Eulero, imperocchè $a_1\, a_2\, a_3$ sono reciprocamente proporzionali ai momenti di inerzia del corpo. E questa è la dimostrazione inversa dell'immagine di Poinsot.

§ 4.

Sezione invariabile, e velocità angolare dei suoi assi.

Essendo $\lambda_3 = 0$, avremo

$$\left.\begin{aligned}
p^2 = x_1^2 &= \frac{a_1(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\ , \quad m_1^2 = \frac{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1} \\
q^2 = x_2^2 &= \frac{a_2(a_2-\lambda_1)(a_2-\lambda_2)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}\ , \quad m_2^2 = \frac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2} \\
r^2 = x_3^2 &= \frac{a_3(a_3-\lambda_1)(a_3-\lambda_2)}{(a_3-a_1)(a_3-\lambda_2)}\ , \quad m_3^2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{\lambda_1 \lambda_2} \\
p^2+q^2+r^2 &= m_1^2+m_2^2+m_3^2 = a_1+a_2+a_3-\lambda_1-\lambda_2
\end{aligned}\right\} . \tag{21}$$

Essendo m_3 costante, sarà del pari

$$\lambda_1 \lambda_2 = \text{costante} = c^2\ , \tag{22}$$

e questo dimostra il teorema di Poinsot notato alla fine della sua opera, cioè che la sezione dell'ellissoide fatta dal piano invariabile è costante, ossia $= \pi c$: imperocchè λ_1 e λ_2 sono (veggasi la fine del § 1) i quadrati dei semiassi della sezione stessa. Questa sezione sarà detta nel seguito *sezione invariabile*. L'equazione precedente poi rappresenta la poloide in coordinate ellittiche.

Considerando finalmente che $P' = Q' = 0$, e che per le (6, 14)

$$ap + a'q + a''r = m_1\ , \quad bp + b'q + b''r = m_2\ , \quad cp + c'q + c''r = m_3\ , \tag{23}$$

si avrà dalle (12) e (13)

$$\left.\begin{aligned}
0 = Pdt + m_1 dt &= m_1 dt + \frac{1}{2}\,\frac{m_2 m_3}{\lambda_2}\,\frac{d\lambda_2}{m_2^2} \\
0 = Qdt + m_2 dt &= m_2 dt - \frac{1}{2}\,\frac{m_3 m_1}{\lambda_1}\,\frac{d\lambda_1}{m_1^2} \\
R'dt = Rdt + m_3 dt &= m_3 dt + \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{d\lambda_1}{m_1^2} + \frac{d\lambda_2}{m_2^2}\right)
\end{aligned}\right\} . \tag{24}$$

E la quantità R′ rappresenterà la velocità angolare degli assi della sezione invariabile: poichè essi coincidono con Om_1 ed Om_2.

§ 5.

Convenzioni.

Torna ora opportuno stabilire alcune convenzioni. La quantità $\pi c = \pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ eguale alla sezione invariabile, sarà sempre intermedia fra la massima e la minima sezion principale; ma se intendiamo che $\sqrt{a_2}$ rappresenti il semiasse medio dell'ellissoide, potrà essere $a_3 a_1 > c^2$, ovvero $a_3 a_1 < c^2$. Noi pertanto rappresenteremo con $\sqrt{a_3}$ il massimo semiasse od il minimo, secondochè la sezione invariabile riesce inferiore o superiore alla media. Con ciò veniamo a supporre che la poloide sia sempre circoscritta all'asse Ox_3: infatti, se la sezione invariabile è inferiore alla media, la poloide dee circondare l'asse massimo, e questo per la convenzione fatta è $\sqrt{a_3}$: se la sezione invariabile è superiore alla media, la poloide dee circondare l'asse minimo, e questo per la stessa convenzione è in tal caso $\sqrt{a_3}$. I sei binomi adunque

$$\left.\begin{array}{lll} a_2 a_3 - c^2 & a_3 a_1 - c^2 & c^2 - a_1 a_2 \\ a_3 - a_2 & a_3 - a_1 & a_2 - a_1 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

riusciranno in ogni caso o tutti positivi o tutti negativi.

Accadendoci di adoperare i doppi segni $\pm$ e $\mp$, senz'alcuna avvertenza, s'intenderà sempre che il segno superiore si riferisce al caso dei binomi (25) positivi, e l'inferiore al caso dei binomi negativi.

Il radicale $\sqrt{\ }$ sovrapposto ad una quantità reale e positiva, significherà sempre la radice *positiva* della quantità: così per esempio scriveremo $\sqrt{(a_3 a_1 - c^2)^2} = \pm (a_3 a_1 - c^2)$ senz'altra indicazione, mentre occorrendoci di estrarre la radice di $(a_2 - c)^2$ dovremo scrivere: $\sqrt{(a_2 - c)^2} = \pm (a_2 - c)$ aggiungendo *secondochè* $a_2 \gtrless c$.

Stabiliremo ora alcune condizioni relative alle terne Ox_1 Ox_2 Ox_3 ed Om_1 Om_2 Om_3.

Per fissare le idee, supporremo il piano fisso su cui rotola l'ellissoide, sotto l'ellissoide ed orizzontale, e con ciò non apportiamo certamente alcuna restrizione al problema. L'asse Om_3 s'intenderà rivolto in basso, e gli assi Om_1 Om_2 presi in modo che il senso dell'angolo $m_1 Om_2$ coincida col senso del moto dell'ellissoide intorno ad Om_3: quindi m_3 sarà sempre una quantità positiva. Gli assi Ox_1 Ox_2 Ox_3 s'intenderanno sovrapponibili ad Om_1 Om_2 Om_3. L'asse Ox_3 che coincide col semiasse $\sqrt{a_3}$, e che non si corica mai in generale sul piano invariabile, converremo

che faccia con Om_3 un angolo acuto od ottuso, secondochè i binomi (25) saranno positivi o negativi. Ma il coseno di quest'angolo è {eq. (19)} $c''=\frac{m_3\,x_3}{a_3}$, dunque x_3 od r avrà il medesimo segno dei binomi (25).

La posizione rispettiva di Om_3 ed Ox_3 è dunque stabilita. Il senso dell'asse Ox_2 si potrà scegliere a piacimento, ma fissato il vertice dell'ellissoide cui è rivolto Ox_2 sarà anche fissato il vertice cui dovrà essere rivolto Ox_1, imperocchè nel caso dei binomi positivi il senso della proiezione dell'angolo $x_1\,Ox_2$ sul piano invariabile dovrà coincidere col senso dell'angolo $m_1\,Om_2$ (per la convenzione fatta sull'angolo $m_3\,Ox_3$ e per la sovrapponibilità delle terne), e quindi col senso della rotazione del corpo: nel caso dei binomi negativi dovrà accadere il reciproco. — Restano gli assi Om_1 ed Om_2. Questi assi coincidono cogli assi della sezione invariabile. Ora quando Ox_1 si corica sul piano invariabile, allora è chiaro che uno degli assi della sezione coinciderà con Ox_1. Noi dunque supporremo che Om_1 sia l'asse che coincide con Ox_1 in uno degli adagiamenti di quest'asse sul piano invariabile, e noi diremo t_0 l'epoca di questo determinato adagiamento. — Così resterà anche determinato Om_2, il quale nell'epoca t_0 coinciderà colla proiezione di Ox_2 o col suo prolungamento, secondochè i binomi (25) saranno positivi o negativi.

Colla convenzione fatta circa gli assi $Om_1\,Om_2$, gli assi a cui si riferiscono λ_1 e λ_2 rimangono ben distinti. Non considerando noi infatti il caso, in cui la poloide passa per gli umbilichi, la sezione invariabile non potrà esser mai un circolo: quindi i suoi due assi pur variando continuamente di lunghezza e di direzione, rimarranno sempre uno maggiore dell'altro: vale a dire, che quello che è maggiore dell'altro in un dato istante rimarrà sempre maggiore in tutta la successione del tempo. Ora il semiasse $\sqrt{\lambda_1}$ coincide con $\sqrt{a_1}$ al tempo t_0 poichè in quell'istante Om_1 (su cui $\sqrt{\lambda_1}$ è contato) coincide con Ox_1 adagiato sul piano invariabile. Dunque λ_1 sarà sempre minore o maggiore di λ_2 secondochè $\sqrt{a_1}$ sarà il minimo o il massimo asse dell'ellissoide, o in altri termini il binomio

$$\lambda_2-\lambda_1$$

avrà lo stesso segno dei binomi (25). Se adunque noi poniamo $\lambda_1+\lambda_2=x$, avremo

$$\pm(\lambda_2-\lambda_1)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4c^2}\quad,\quad \lambda_1=\frac{x}{2}\mp\sqrt{\frac{x^2}{4}-c^2}\quad,\quad \lambda_2=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}+c^2}\,. \tag{26}$$

Per vedere col sussidio di queste equazioni le vicende principali per cui passano i due semiassi, bisognerebbe aver già determinato i limiti di x. Però anche senza quel sussidio si possono stabilire queste fasi attenendosi al criterio che la differen-

za λ_2 λ_1 non deve cambiare di segno, e che il prodotto λ_1 λ_2 vale c^2. Ecco dunque queste vicende secondo i vari casi:

$a_1 < a_2 < c$	$a_1 < c < a_2$	$a_1 > a_2 > c$	$a_1 > c > a_2$
$\lambda_1 = a_1 \ldots a_2$	$\lambda_1 = a_1 \ldots \frac{c^2}{a_2}$	$\lambda_1 = a_1 \ldots a_2$	$\lambda_1 = a_1 \ldots \frac{c^2}{a_2}$
$\lambda_2 = \frac{c^2}{a_1} \ldots \frac{c^2}{a_2}$	$\lambda_2 = \frac{c^2}{a_1} \ldots a_2$	$\lambda_2 = \frac{c^2}{a_1} \ldots \frac{c^2}{a_2}$	$\lambda_2 = \frac{c^2}{a_1} \ldots a_2$.

§ 6.

La longitudine degli assi della sezione invariabile, e particolarità del loro movimento.

L'angolo $m_1 O m_2$ è sempre contato nel senso della rotazione del corpo; dunque secondochè R′ (24) sarà positivo o negativo, gli assi della sezione invariabile gireranno nel senso della rotazione del corpo o in senso contrario. Sia ψ l'angolo formato da Om_1 con una retta fissa sul piano invariabile e stimato nel senso della rotazione del corpo, avremo: $R' = \frac{d\psi}{dt}$, e dalle (24) dedurremo

$$\frac{d\lambda_1 + d\lambda_2}{2\,dt} = \frac{m_1 m_2}{m_3}(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{27}$$

$$m_3 \frac{d\psi}{dt} = \frac{(m_2^2 + m_3^2)\lambda_1 - (m_1^2 + m_3^2)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{28}$$

Ed avendo posto $\lambda_1 + \lambda_2 = x$, otterremo in grazia delle (21)

$$\frac{dt}{cm_3} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{-(a_1^2 - ax + c^2)(a_2^2 - a_2 x + c^2)(a_3^2 - a_3 x + c^2)}} \tag{29}$$

secondochè x è crescente o decrescente quando cresce t, e

$$m_3 \frac{d\psi}{dt} = \frac{(S_2 + c^2)x - 2(S_3 + c^2 S_1)}{x^2 - 4c^2}, \tag{30}$$

ove per S_1 S_2 S_3 intendiamo le somme $a_1 + a_2 + a_3$, $a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2$, ed il prodotto $a_1 a_2 a_3$. Dalla (30) finalmente si ricava

$$2m_3 c\psi = \int \frac{(c+a_1)(c+a_2)(c+a_2)}{x+2c}\,dt + \int \frac{(c-a_1)(c-a_2)(c-a_3)}{x-2c}\,dt + \text{cost.} \tag{31}$$

La *costante* dipende dalla retta fissa da cui è contata la longitudine ψ, retta che definiremo a suo tempo. Intanto notiamo che l'angolo ψ risolve il problema propostoci.

Esaminiamo ora il senso del movimento degli assi della sezione invariabile. Dalla convenzione fatta sul segno dei binomi (25) risultano le seguenti disuguaglianze

$$\frac{(c\pm a_1)^2}{a_1}-\frac{(c\pm a_2)^2}{a_2}=\frac{(a_1a_2-c^2)(a_1-a_2)}{a_1a_2}>0$$

$$\frac{(c\pm a_2)^2}{a_2}-\frac{(c\pm a_3)^2}{a_3}=\frac{(a_2a_3-c^2)(a_2-a_3)}{a_2a_3}<0$$

$$\frac{(c\pm a_3)^2}{a_3}-\frac{(c\pm a_1)^2}{a_1}=\frac{(a_3a_1-c^2)(a_3-a_1)}{a_1a_3}>0:$$

e quindi

$$\frac{(c\pm a_3)^2}{a_3}>\frac{(c\pm a_1)^2}{a_1}>\frac{(c\pm a_2^2)}{a_2} \tag{32}$$

od anche

$$\frac{c^2+a_3^2}{a_3}>\frac{c^2+a_1^2}{a_1}>\frac{c^2+a_2^2}{a_2}, \tag{33}$$

graduazione che vale tanto nel caso di $a_1<a_2<a_3$ quanto nel caso di $a_1>a_2>a_3$.

I tre trinomi che trovansi sotto il radicale nel denominatore della (29), sono rispettivamente eguali ad

$$(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)\quad,\quad(a_2-\lambda_1)(a_2-\lambda_2)\quad,\quad(a_3-\lambda_1)(a_3-\lambda_2)\,. \tag{34}$$

Ora osservando le espressioni (21) che dànno $p^2\ q^2\ r^2$ ed i segni dei binomi (25) della seconda linea, si trae che dei prodotti (34) il primo è sempre >0, il secondo è <0, ed il terzo è >0; dunque

$$a_1^2-a_1x+c^2>0\quad,\quad a_2^2-a_2x+c^2<0\quad,\quad a_3^2-a_3x+c^2>0\,, \tag{35}$$

e quindi per le (33)

$$\frac{c^2+a_1^2}{a_1}>x>\frac{c^2+a_2^2}{a_2}. \tag{36}$$

Tali dunque sono i limiti entro cui varia x, limiti che corrispondono alle fasi di λ_1 e di λ_2 notate nel quadro posto alla fine del § 5.

Ora il valore di $m_3\,\frac{d\psi}{dt}$ dato dalla (30), quando x raggiunge il suo valor massimo si riduce ad

$$\frac{a_1}{c^2-a_1^2}\left\{c^2-a_1a_2+a_3(a_2-a_1)\right\},$$

e quando x raggiunge il valor minimo si riduce ad

$$\frac{a_2}{c^2-a_2^2}[c^2-a_2a_3+a_3a_1-a_1a_2]=\frac{a_2}{c^2-a_2^2}[c^2-a_2^2-(a_3-a_2)(a_2-a_1)]\,.$$

Ora la prima quantità è sempre positiva, e la seconda lo è pur sempre quando $c<a_2$. Ma se $c>a_2$ il segno della seconda quantità coincide col segno della quantità fra le parentesi. Onde, se $c<a_2$ il movimento degli assi della sezione invariabile è sempre diretto, e se $c>a_2$ il movimento è pur diretto qualora $c^2\geqq a_2\ a_3-a_3\,a_1+a_1\,a_2$ ed è alternativamente diretto e retrogrado quando $c<a_2a_3-a_3a_1+a_1a_2$.

Il caso in cui $c^2=a_2a_3-a_3a_1+a_1a_2$ è quello in cui l'area della sezione invariabile è eguale ad una dell'ellissi, in cui, com'è noto, si risolve la poloide quando la distanza del piano fisso di contatto dal centro è uguale al semiasse medio dell'ellissoide. Per dimostrarlo basterà trovare l'area di una di tali ellissi. La proprietà caratteristica di queste ellissi si è che tutti i piani tangenti all'ellissoide in un punto qualunque di esse distano dal centro di $\sqrt{a_2}$. Tiriamo due di questi piani, e supponiamoli coniugati tra loro ed al piano dell'ellisse, la cui area sia $=\pi C$. Il piano tangente parallelo al piano di questa ellisse disterà dal centro della quantità $\sqrt{\frac{a_1a_2a_3}{C^2}}$: e per il teorema ben noto, che i quadrati dei reciproci delle normali a tre piani tangenti coniugati dànno una somma eguale alla somma dei quadrati dei reciproci dei semiassi, avremo

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\frac{C^2}{a_1a_2a_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\,.$$

Di qui si ricava

$$C^2=a_2a_3-a_3a_1+a_1a_2\,.$$

§ 7.

Riduzione alla forma canonica degl'integrali ellittici.

Per ridurre il tempo e l'angolo ψ alla forma canonica, porremo

$$\frac{a_2^2-a_2x+c^2}{a_2}=\frac{c^2+a_2^2}{a_2}-x=-\left(\frac{c^2+a_1^2}{a_1}-\frac{c^2+a_2^2}{a_2}\right)\operatorname{sen}^2\varphi \tag{37}$$

e φ sarà, in virtù delle (33) e (36), sempre una quantità reale. Da questa equazione ricaviamo

$$\frac{a_1^2-a_1x+c^2}{a_1}=\frac{c^2+a_1^2}{a_1}-x=\left(\frac{c^2+a_1^2}{a_1}-\frac{c^2+a_2^2}{a_2}\right)\cos^2\varphi \tag{38}$$

$$\frac{a_3^2-a_3x+c^3}{a_3}=\frac{c^2+a_3^2}{a_3}-x=\left(\frac{c^2+a_3^2}{a_3}-\frac{c^2+a_2^2}{a_2}\right)\Delta^2\varphi \tag{39}$$

ove $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$, essendo posto

$$k^2 = \frac{\dfrac{c^2+a_1^2}{a_1} - \dfrac{c^2+a_2^2}{a_2}}{\dfrac{c^2+a_3^2}{a_3} - \dfrac{c^2+a_2^2}{a_2}} = \frac{\dfrac{(c\pm a_1)^2}{a_1} - \dfrac{(c\pm a_2)^2}{a_2}}{\dfrac{(c\pm a_3)^2}{a_3} - \dfrac{(c\pm a_2)^2}{a_2}}. \tag{40}$$

Questa quantità per le (33) non sarà mai negativa nè superiore all'unità.

Differenziando la (37) si ha

$$dx = 2\left\{\frac{c^2+a_1^2}{a_1} - \frac{c^2+a_2^2}{a_2}\right\} d\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\,,$$

onde fatte le sostituzioni nelle (29) e (31), posto per brevità

$$n = \sqrt{\frac{c^2+a_3^2}{a_3} - \frac{c^2+a_2^2}{a_2}}\,, \tag{41}$$

$$f^2 = \frac{\dfrac{c^2+a_1^2}{a_1} - \dfrac{c^2+a_2^2}{a_2}}{\dfrac{(c+a_2)^2}{a_2}}\,, \qquad g^2 = \frac{\dfrac{c^2+a_1^2}{a_1} - \dfrac{c^2+a_2^2}{a_2}}{\dfrac{(c-a_2)^2}{a_2}}\,, \tag{42}$$

otterremo

$$dt = \frac{1}{n}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\psi = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{a_1}{a_1 a_3}}\left\{\frac{(c+a_1)(c+a_3)}{c+a_2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+f^2\operatorname{sen}^2\varphi)\Delta\varphi} + \frac{(c-a_1)(c-a_2)}{c-a_2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+g^2\operatorname{sen}\varphi)\Delta\varphi}\right\} + \text{cost.} \tag{43}$$

Nella prima di queste equazioni abbiamo soppresso il doppio segno, perchè intendiamo che φ cresca continuamente col tempo.

Se poniamo inoltre $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$, avremo

$$t = \frac{u}{n} + \text{cost.} \tag{44}$$

$$\psi = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_3}}\left\{\frac{(c+a_1)(c+a_3)}{c+a_2}\int_0^u \frac{du}{1+f^2\operatorname{sn}^2 u} + \frac{(c-a_1)(c-a_3)}{c-a_2}\int_0^u \frac{du}{1+g^2\operatorname{sn}^2 u}\right\} + \text{cost.} \tag{45}$$

integrali ellittici di terza specie a parametro trigonometrico, essendo f^2 e g^2 quantità positive.

§ 8.

Funzioni ellittiche.

Sia

$$\cos F = \frac{c+a_2}{a_3+c}\sqrt{\frac{a_3}{a_2}} \quad , \quad \cos G = \frac{c-a_2}{a_3-c}\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}, \tag{46}$$

e con F intendiamo un angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e 0, ovvero fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, secondochè i binomi (25) sono positivi o negativi, e con G un angolo compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ovvero fra $\frac{\pi}{2}$ e π, secondochè $c-a_2$ avrà segno eguale o contrario a quello dei binomi (25).

Poniamo inoltre

$$\tau = \int_0^F \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \quad , \quad \sigma = \int_0^G \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}, \tag{47}$$

essendo

$$k'^2 = 1-k^2 = \frac{\frac{c^2+a_3^2}{a_3} - \frac{c^2+a_1^2}{a_1}}{\frac{c^2+a_3^2}{a_3} - \frac{c^2+a_2^2}{a^2}} = \frac{\frac{(c\pm a_3)^2}{a_3} - \frac{(c\pm a_1)^2}{a_1}}{\frac{(c\pm a_3)^2}{a_3} - \frac{(c\pm a_2)^2}{a_2}}. \tag{48}$$

Avremo dunque

$$\operatorname{tg}^2 F = \operatorname{tg}^2 am(\tau, k') = \frac{\frac{(c+a_3)^2}{a_3} - \frac{(c+a_2)^2}{a_2}}{\frac{(c+a_2)^2}{a_2}} \quad , \quad \operatorname{tg}^2 G = \operatorname{tg}^2 am(\sigma, k') = \frac{\frac{(c-a_3)^2}{a_3} - \frac{(c-a_2)^2}{a_3}}{\frac{(c-a_2)^2}{a_2}}.$$

Ora si ha in generale $\operatorname{tg} am(u, k') = -i \operatorname{sn}(iu, k)$, perciò omettendo l'indicazione del modulo quando questo è k, avremo

$$\left.\begin{aligned}
-\operatorname{sn}^2 i\tau &= \frac{\frac{(c+a_3)^2}{a_3} - \frac{(c+a_2)^2}{a_2}}{\frac{(c+a_2)^2}{a_2}} \quad , & -\operatorname{sn}^2 i\sigma &= \frac{\frac{(c-a_3)^2}{a_3} - \frac{(c-a_2)^2}{a_2}}{\frac{(c+a_2)^2}{a_2}} \\
-k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau &= \frac{\frac{(c+a_1)^2}{a_1} - \frac{(c+a_2)^2}{a_2}}{\frac{(c+a_2)^2}{a_2}} \quad , & -k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma &= \frac{\frac{(c-a_1)^2}{a_1} - \frac{(c-a_2)^2}{a_2}}{\frac{(c-a_2)^2}{a_2}} \\
\operatorname{cn}^2 i\tau &= \frac{(c+a_3)^2 a_2}{(c+a_2)^2 a_3} \quad , & \operatorname{cn}^2 i\sigma &= \frac{(c-a_3)^2 a_2}{(c-a_2)^2 a_3} \\
\operatorname{dn}^2 i\tau &= \frac{(c+a_1)^2 a_2}{(c+a_2)^2 a_1} \quad , & \operatorname{dn}^2 i\sigma &= \frac{(c-a_1)^2 a_2}{(c-a_2)^2 a_1}
\end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Quindi

$$-k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau = f^2 \quad , \quad -k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma = g^2 ,$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{cn}^2 i\tau \operatorname{dn}^2 i\tau}{-\operatorname{sn}^2 i\tau}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_3}\frac{(c+a_1)(c+a_3)}{c+a_2}} ,$$

$$\mp\sqrt{\frac{\operatorname{cn}^2 i\sigma \operatorname{dn}^2 i\sigma}{-\operatorname{sn}^2 i\sigma}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_3}\frac{(c-a_1)(c-a_3)}{c-a_2}} .$$

Nella quale ultima espressione dovrà prendersi il segno superiore o l'inferiore, secondochè $c - a_2$ è maggiore o minore di 0. Per poter esprimere i primi membri di queste equazioni sotto forma razionale, bisogna prima indagare i segni propri delle funzioni ellittiche di σ e di τ.

Ora si ha in generale

$$-i \operatorname{sn}(iu, k) = \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} \quad , \quad \operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')} \quad , \quad \operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} ,$$

perciò

$$\left.\begin{array}{lll} -i \operatorname{sn} i\tau = \operatorname{tg} F & , \quad \operatorname{cn} i\tau = \sec F & , \quad \operatorname{dn} i\tau = \Delta F \sec F \\ -i \operatorname{sn} i\sigma = \operatorname{tg} G & , \quad \operatorname{cn} i\sigma = \sec G & , \quad \operatorname{dn} i\sigma = \Delta G \sec G \end{array}\right\} . \tag{50}$$

Ora da queste equazioni e dalle convenzioni fatte sui limiti di F e di G si ricava: 1.° che $\operatorname{cn} i\tau$ e $\operatorname{dn} i\tau$ sono sempre quantità positive ed $i \operatorname{sn} i\tau$ una quantità di segno contrario ad F, cioè di segno eguale a quello dei binomi (25); 2.° che il prodotto $\operatorname{cn} i\sigma \operatorname{dn} i\sigma$ è sempre una quantità positiva, ed $i \operatorname{sn} i\sigma$ una quantità di segno contrario a tg G od a cos G, ovvero a $\frac{c-a_2}{a_3-c}$, cioè di segno contrario od eguale a $c-a_2$, secondochè i binomi (25) saranno positivi o negativi. Dunque potremo scrivere

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_3}\frac{(c+a_1)(c+a_3)}{c+a_2}} = \pm\frac{\operatorname{cn} i\tau \operatorname{dn} i\tau}{i \operatorname{sn} i\tau}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{a_2}{a_1 a_3}\frac{(c-a_1)(c-a_3)}{(c-a_2)}} = \pm\frac{\operatorname{cn} i\sigma \operatorname{dn} i\sigma}{i \operatorname{sn} i\sigma} .$$

Osservando finalmente che

$$\frac{\operatorname{cn}\gamma \operatorname{dn}\gamma}{\operatorname{sn}\gamma} = \frac{\operatorname{cn}\gamma \operatorname{dn}\gamma}{\operatorname{sn}\gamma}(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\gamma \operatorname{sn}^2 u) + k^2 \operatorname{sn}\gamma \operatorname{cn}\gamma \operatorname{dn}\gamma \operatorname{sn}^2 u$$

avremo

$$\psi = \pm \frac{u}{2i}\left\{\frac{\operatorname{cn} i\sigma \operatorname{dn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma} + \frac{\operatorname{cn} i\tau \operatorname{dn} i\tau}{\operatorname{sn} i\tau}\right\}$$

$$\pm \frac{1}{2i}\int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\sigma \operatorname{dn} i\sigma \operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma \operatorname{sn}^2 u} \pm \frac{1}{2i}\int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\tau \operatorname{dn} i\tau \operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2 u} + \text{cost.} \tag{51}$$

ovvero

$$\psi = \mp \frac{u}{2}\left\{\frac{\partial \log \operatorname{sn} i\sigma}{\partial \sigma} + \frac{\partial \log \operatorname{sn} i\tau}{\partial \tau}\right\} \pm \frac{1}{2i}\left[\Pi(u, i\sigma) + \Pi(u, i\tau)\right] + \text{cost.} \tag{52}$$

Osservazione. — È facile vedere, che il caso in cui $c - a_2$ ha segno eguale a quello dei binomi (25), è quello in cui la zona dell'ellissoide circoscritta dalla poloide contiene due umbilichi, e che il caso in cui $c - a_2$ ha segno contrario a quello dei binomi (25), è quello in cui la stessa zona non contiene alcun umbilico.

§ 9.

Gli assi della sezione invariabile oscillano intorno ad una retta che gira equabilmente.

Introdurremo ora nell'espressione di Ψ i trascendenti Θ ed H. Si ha in generale

$$\operatorname{sn}\gamma = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}\gamma}{\Theta\gamma}, \quad \operatorname{cn}\gamma = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\mathrm{H}_1\gamma}{\Theta\gamma}, \quad \operatorname{dn}\gamma = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1\gamma}{\Theta\gamma}\ ^{*)}$$

$$\Pi(u, \gamma) = \frac{\partial \log \Theta\gamma}{\partial \gamma} u + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-\gamma)}{\Theta(u+\gamma)}.$$

Perciò avremo

$$\psi = \mp \frac{u}{2}\left\{\frac{\partial \log \mathrm{H}(i\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \log \mathrm{H}(i\tau)}{\partial \tau}\right\} \pm \frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-\sigma)\Theta(u-\tau)}{\Theta(u+\sigma)\Theta(u+\tau)} + \text{cost.} \tag{53}$$

La quantità $\pm \frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\tau)}{\Theta(u+i\tau)}$ è una quantità periodica perchè τ è sempre compresa fra $-\mathrm{K}'$ e $+\mathrm{K}'$. Non è sempre così di $\pm \frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma)}{\Theta(u+i\sigma)}$, poichè quando $c - a_2$ ha segno contrario ai binomi (25), σ è superiore a K', e lo sviluppo di quel logaritmo darebbe luogo ad un termine proporzionale ad u o al tempo. Ecco come si può, quando $\sigma > \mathrm{K}'$, separare questo termine.

*) Noi poniamo con Jacobi, per semplicità di scrittura, $\Theta(\gamma + \mathrm{K}) = \Theta_1\gamma$, ed $\mathrm{H}(\gamma + \mathrm{K}) = \mathrm{H}_1\gamma$.

Dalle *Fundamenta* [§ 61, formola (8)] si ricava

$$\Theta(u+2i\mathrm{K}')=-e^{\frac{\pi(\mathrm{K}'-iu)}{\mathrm{K}}}\Theta u.$$

Onde

$$\frac{\Theta(u+2i\mathrm{K}'-i\sigma)}{\Theta(u-2i\mathrm{K}'+i\sigma)}=e^{-\frac{2\pi iu}{\mathrm{K}}}\frac{\Theta(u-i\sigma)}{\Theta(u+i\sigma)}.$$

Ponendo perciò $\sigma-2\mathrm{K}'=\sigma'$, risulterà

$$\pm\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma)}{\Theta(u+i\sigma)}=\pm\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\pm\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma')}{\Theta(u+i\sigma')},$$

ed è chiaro che il logaritmo che trovasi in questo secondo membro sarà una quantità periodica, poichè se σ è compreso fra K' e $2\mathrm{K}'$, σ' sarà compreso fra $-\mathrm{K}'$ e 0.

Dalle *Fundamenta* si trae inoltre [§ 61, formola (10)]:

$$\mathrm{H}u=-e^{-\frac{\pi(\mathrm{K}'+iu)}{\mathrm{K}}}\mathrm{H}(u-2i\mathrm{K}'),$$

dunque

$$\mp\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\sigma)}{\partial\sigma}=\mp\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\mp\frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\sigma')}{\partial\sigma'}.$$

Onde potremo scrivere

$$\psi=\mp\frac{u}{2}\left\{\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\sigma')}{\partial\sigma'}+\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\tau)}{\partial\tau}\right\}\pm\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma')\Theta(u-i\tau)}{\Theta(u+i\sigma')\Theta(u+i\tau)}+\text{cost.}\tag{54}$$

Concludiamo adunque che *gli assi della sezione invariabile oscillano intorno ad una retta che gira nel senso del moto dell' ellissoide con una velocità angolare uniforme eguale a*

$$\pm\frac{n}{2}\left\{\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\sigma)}{\partial\sigma}+\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\tau)}{\partial\tau}\right\}\text{ ovvero a }\pm\frac{n}{2}\left\{\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\sigma')}{\partial\sigma'}+\frac{\partial\log\mathrm{H}(i\tau)}{\partial\tau}\right\}\tag{55}$$

secondochè la poloide contiene due umbilichi dell' ellissoide o nessuno: e l' ineguaglianza è nei due casi rispettivamente

$$\pm\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma)\Theta(u+i\tau)}{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\tau)}\text{ ovvero }\pm\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma')\Theta(u+i\tau)}{\Theta(u+i\sigma')\Theta(u-i\tau)}.\tag{56}$$

Aggiungo questo altro teorema:

La ineguaglianza del movimento degli assi della sezione invariabile non giunge

mai a $\frac{\pi}{2}$; *e nel caso che la sezione invariabile sia superiore alla sezione circolare dell'ellissoide, l'ineguaglianza è sempre inferiore a* $\frac{\pi}{4}$.

Jacobi infatti ha dimostrato che quando a è positivo ed inferiore a K', il valore di

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

è positivo ed inferiore a $\frac{\pi}{2}$ *). Ne viene per conseguenza che le ineguaglianze rappresentate dall'una e dall'altra delle espressioni (56) non ascenderanno mai a $\frac{\pi}{2}$. Se poi la sezione invariabile è superiore alla sezione circolare, sarà $c > a_2$, ed allora se i binomi (25) sono positivi, l'ineguaglianza sarà espressa da

$$+\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma)\Theta(u-i\tau)}{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u+i\tau)}=\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\tau)}{\Theta(u+i\tau)}-\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u+i\sigma)}{\Theta(u-i\sigma)}.$$

Ora tanto σ, quanto $-\tau$ sono compresi in questo caso tra 0 e K'. Perciò i termini logaritmici, inferiori ciascuno a $\frac{\pi}{4}$, avranno per differenza una quantità inferiore a $\frac{\pi}{4}$. Se poi essendo $c > a_2$ i binomi (25) sono negativi, la disuguaglianza è espressa da

$$-\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma')\Theta(u-i\tau)}{\Theta(u+i\sigma')\Theta(u+i\tau)}=\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u+i\tau)}{\Theta(u-i\tau)}-\frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u-i\sigma')}{\Theta(u+i\sigma')}.$$

Ora τ è compreso fra 0 e K', e $-\sigma'$ è pure compreso fra le medesime quantità, poichè $\sigma'=\sigma-2K'$, e σ è compreso fra K' e 2K'. Perciò i termini logaritmici, inferiori ciascuno a $\frac{\pi}{4}$, daranno per differenza una quantità inferiore a $\frac{\pi}{4}$.

§ 10.

Espressioni in funzione del tempo degli assi della sezione invariabile e delle componenti secondo questi assi della velocità angolare del corpo.

Noi esprimeremo anche λ_1 e λ_2 in funzione di σ di τ e di u. Le equazioni (26) si possono mettere sotto la forma

$$\pm(\lambda_2-\lambda_1)=\sqrt{x+2c}\,\sqrt{x-2c},$$

$$\frac{\lambda_1}{c}=\frac{\sqrt{x+2c}\mp\sqrt{x-2c}}{\sqrt{x+2c}\pm\sqrt{x-2c}}\qquad\frac{\lambda_2}{c}=\frac{\sqrt{x+2c}\pm\sqrt{x-2c}}{\sqrt{x+2c}\mp\sqrt{x-2c}}.$$

*) *Mathematische Werke.* Band II. Berlin 1851, pag. 190.

Dalla (37) poi si trae

$$x+2c=\frac{(c+a_2)^2}{a_2}(1+f^2\,\mathrm{sn}^2\,u) \qquad x-2c=\frac{(c-a_2)^2}{a_2}(1+g^2\,\mathrm{sn}^2\,u)\,.$$

Ora le (41) e (49) dànno

$$\frac{(c+a_2)^2}{a_2}=\frac{n^2}{-\mathrm{sn}^2\,i\tau} \qquad \frac{(c-a_2)^2}{a_2}=\frac{n^2}{-\mathrm{sn}^2\,i\sigma}\,:$$

perciò

$$x+2c=\frac{n^2}{-\mathrm{sn}^2\,i\tau}[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(i\tau)\,\mathrm{sn}^2\,u] \qquad x-2c=\frac{n^2}{-\mathrm{sn}^2\,i\sigma}[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(i\sigma)\,\mathrm{sn}^2\,u]\,. \tag{57}$$

Poniamo ora per brevità

$$\mathrm{U}=\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\tau\,\mathrm{sn}^2\,u} \qquad \mathrm{V}=\pm\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\sigma\,\mathrm{sn}^2\,u}\left(\text{secondochè } \sigma \lessgtr \mathrm{K}'\right) \tag{58}$$

ed osserviamo che $i\,\mathrm{sn}\,i\tau$ ha il medesimo segno dei binomi (25), e che $i\,\mathrm{sn}\,i\sigma$ è positivo o negativo secondochè $\sigma \gtrless \mathrm{K}'$, cioè ha segno contrario a V. Dunque

$$\sqrt{x+2c}=\pm\frac{n\mathrm{U}}{i\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,, \qquad \sqrt{x-2c}=-\frac{n\mathrm{V}}{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma}\,. \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_1}{c}=\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma+\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,, \qquad \frac{\lambda_2}{c}=\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma+\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau} \\ &\lambda_2-\lambda_1=\frac{n^2\mathrm{UV}}{\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{sn}\,i\sigma}=\frac{4c\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{UV}}{\mathrm{sn}^2\,i\tau-\mathrm{sn}^2\,i\sigma} \end{aligned}\right\}. \tag{60}$$

Da quest'ultima si trae

$$\frac{n^2}{c}=\frac{4\,\mathrm{sn}^2\,i\sigma\,\mathrm{sn}^2\,i\tau}{\mathrm{sn}^2\,i\tau-\mathrm{sn}^2\,i\sigma}\,.$$

Esprimiamo queste stesse quantità per mezzo delle funzioni Θ ed H. Avremo

$$\mathrm{U}=\frac{\Theta(o)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\,\Theta(u-i\tau)}}{\Theta u\,\Theta(i\tau)} \qquad \mathrm{V}=\frac{\Theta(o)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\,\Theta(u-i\sigma)}}{\Theta u\,\Theta(i\sigma)} \tag{61}$$

ed in questa seconda equazione non abbiamo messo il doppio segno poichè $\Theta(i\sigma)$ ha segno positivo o negativo secondochè $\sigma \lessgtr K'$. Quindi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda_1}{c} &= \frac{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} + H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}}{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} - H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}} \\
\frac{\lambda_2}{c} &= \frac{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} - H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}}{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} + H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}} \\
\lambda_2 - \lambda_1 &= \frac{k n^2 \sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\sigma)\Theta(u-i\tau)}\ \Theta^2(o)}{\Theta^2 u\, H(i\sigma) H(i\tau)}
\end{aligned}\right\}. \tag{62}$$

A quest'ultima espressione può esser data un'altra forma. Siccome

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n^2}{c\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau} &= \frac{4\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}^2 i\tau - \mathrm{sn}^2 i\tau} = \frac{4\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}(i\tau - i\sigma)\,\mathrm{sn}(i\tau + i\sigma)}\ \frac{1}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau} \\
&= \frac{4\,H(i\sigma)H(i\tau)\Theta(i\sigma)\Theta(i\tau)}{\Theta^2(o)\,H(i\tau+i\sigma)\,H(i\tau-i\sigma)}
\end{aligned}\right\}, \tag{63}$$

così potremo scrivere

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{c} = \frac{4\,H(i\sigma)H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\sigma)\Theta(u-i\tau)}}{H(i\sigma+i\tau)\,H(i\sigma-i\tau)\,\Theta^2 u}. \tag{64}$$

Esprimeremo da ultimo in funzione di σ di τ e di u le quantità m_1 ed m_2, che rappresentano le componenti della velocità angolare secondo gli assi della sezione invariabile.

A tale scopo ricordando che $n^2 = \frac{(c-a_3)^2}{a_3} - \frac{(c-a_2)^2}{a_2}$ avremo primieramente dalle (49)

$$\frac{(c+a_2)^2}{a_2} = -\frac{n^2}{\mathrm{sn}^2 i\tau}, \qquad \frac{(c-a_2)^2}{a_2} = -\frac{n^2}{\mathrm{sn}^2 i\sigma}$$

$$\frac{(c+a_1)^2}{a_1} = -\frac{n^2\,\mathrm{dn}^2 i\tau}{\mathrm{sn}^2 i\tau}, \qquad \frac{(c-a_1)^3}{a_1} = -\frac{n^2\,\mathrm{dn}^2 i\sigma}{\mathrm{sn}^2 i\sigma}$$

$$\frac{(c+a_3)^2}{a_3} = -\frac{n^2\,\mathrm{cn}^2 i\tau}{\mathrm{sn}^2 i\tau}, \qquad \frac{(c-a_3)^2}{a_3} = -\frac{n^2\,\mathrm{cn}^2 i\sigma}{\mathrm{sn}^2 i\sigma}.$$

Ora per le (50) $i\,\mathrm{sn}\,i\tau$ ha il medesimo segno dei binomi (25), $\mathrm{cn}\,i\tau$, $\mathrm{dn}\,i\tau$ sono

quantità positive, ed $i\,\mathrm{sn}\,i\sigma$, $-\mathrm{cn}\,i\sigma$, $-\mathrm{dn}\,i\sigma$ hanno il segno di $\frac{c-a_2}{c-a_3}$ o di $\frac{c-a_2}{a_1-c}$. Dunque

$$\left.\begin{array}{ll} c+a_2=\pm\dfrac{n\sqrt{a_2}}{i\,\mathrm{sn}\,i\tau} & c-a_2=\mp\dfrac{n\sqrt{a_2}}{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma} \\ c+a_1=\pm\dfrac{n\sqrt{a_1}\,\mathrm{dn}\,i\tau}{i\,\mathrm{sn}\,i\tau} & c-a_1=\mp\dfrac{n\sqrt{a_1}\,\mathrm{dn}\,i\sigma}{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma} \\ c+a_3=\pm\dfrac{n\sqrt{a_3}\,\mathrm{cn}\,i\tau}{i\,\mathrm{sn}\,i\tau} & c-a_3=\pm\dfrac{n\sqrt{a_3}\,\mathrm{cn}\,i\sigma}{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma} \end{array}\right\}. \tag{65}$$

Dividendo ora la differenza delle equazioni poste sulla stessa linea per la loro somma, si ottiene:

$$\frac{a_2}{c}=\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma+\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{sn}\,i\tau}\,,\quad \frac{a_1}{c}=\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau+\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau-\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma}\,,\quad \frac{a_3}{c}=\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau-\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\sigma}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau+\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\sigma}. \tag{66}$$

Dai precedenti valori di $a_1\,a_2\,a_3$, e dal valore di λ_1 dato dalla equazione (60), si ricava

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1-\lambda_1}{c}=\dfrac{2\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau-\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma}\cdot\dfrac{\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau} \\ \dfrac{a_2-\lambda_1}{c}=\dfrac{2\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{sn}\,i\tau}\cdot\dfrac{\mathrm{U}-\mathrm{V}}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau} \\ \dfrac{a_3-\lambda_1}{c}=-\dfrac{2\,\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau+\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\tau}\cdot\dfrac{\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma+\mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau} \end{array}\right\}. \tag{67}$$

I valori di $a_1-\lambda_2$, $a_2-\lambda_2$, $a_3-\lambda_2$ si deducono da questi col solo cambiamento di V in $-$V, ed in generale in tutte le formole contenenti le variabili λ_1 e λ_2 si otterrà l'inversione di queste con quel solo cambiamento di segno. Ciò posto, e fatto per brevità

$$\Delta=(\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau-\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma)(\mathrm{sn}\,i\sigma-\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau+\mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\sigma)\,, \tag{68}$$

ed osservando che

$$\frac{n^2}{2c}=\frac{2\,\mathrm{sn}^2\,i\sigma\,\mathrm{sn}^2\,i\tau}{\mathrm{sn}^2\,i\tau-\mathrm{sn}^2\,i\tau}$$

avremo

$$m_1^2 = \frac{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}$$

$$= \frac{n^2(\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau)(\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau)}{2\Delta\mathrm{U}\mathrm{V}}, \tag{69}$$

$$m_2^2 = \frac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$= \frac{n^2(\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau)(\mathrm{U}+\mathrm{V})(\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau)}{-2\Delta\mathrm{U}\mathrm{V}}. \tag{70}$$

In una prossima memoria dimostreremo che

$$v^2 = m_1^2 + m_2^2 = \frac{n^2}{\mathrm{sn}^2\alpha}(1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 u) = \frac{2n^2k'^2}{\mathrm{dn}^2(\alpha+u)\mathrm{dn}^2(\alpha-u) - k'^2\mathrm{sn}^2(\alpha+u)\mathrm{sn}^2(\alpha-u) - \mathrm{cn}^2(\alpha+u)\mathrm{cn}^2(\alpha-u)}$$

ed

$$m_1^2 = -\frac{v^2}{4}\frac{(\mathrm{U}'-\mathrm{V}')^2}{\mathrm{U}'\mathrm{V}'} \qquad m_2^2 = \frac{v^2}{4}\frac{(\mathrm{U}'+\mathrm{V}')^2}{\mathrm{U}'\mathrm{V}'},$$

ove

$$\mathrm{U}' = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha-u)}, \qquad \mathrm{V}' = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha+u)}$$

$$\alpha = \frac{i\sigma + i\tau - 2\mathrm{K}}{2}, \qquad \beta = \frac{i\sigma - i\tau}{2},$$

i segni di U′ e V′ essendo presi in modo da riuscire quantità immaginarie coniugate.

NOTA

§ 1.

Siano $x\ y\ z$ le coordinate di un punto rispetto a tre assi fissi ortogonali Ox, Oy, Oz, ed $x'\ y'\ z'$ le coordinate dello stesso punto rispetto a tre assi ortogonali mobili Ox', Oy', Oz', coi quali il punto è invariabilmente connesso. Fra le coordinate dei due sistemi esistano le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' + c\,z' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

È ben noto che le velocità angolari P, Q, R della terna mobile, stimate secondo Ox', Oy, ed Oz', sono date dalle seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} P\,dt &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'' \\ Q\,dt &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' \\ R\,dt &= b\,da + b'\,da' + b''\,da'' \end{aligned}\right\}, \qquad (b)$$

ma la dimostrazione che ne dànno i trattatisti non è semplice, e lascia il dubbio sul senso delle velocità angolari. Questa che segue non mi pare abbia tali difetti. Si prenda sull'asse Oy', un punto B distante 1 dall'origine. Le coordinate di B rispetto agli assi fissi saranno

$$x = b \qquad y = b' \qquad z = b''.$$

Movendosi la terna mobile, le velocità di B secondo Ox, Oy, Oz saranno

$$\frac{db}{dt}, \quad \frac{db'}{dt}, \quad \frac{db''}{dt}.$$

Se noi proiettiamo queste tre velocità sull'asse Oz', avremo nella loro somma la componente della velocità di B secondo quest'asse, la quale sarà data da

$$\cos(xz')\frac{db}{dt} + \cos(yz')\frac{db'}{dt} + \cos(zz')\frac{db''}{dt} = c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}.$$

Ma la velocità del punto B secondo Oz', misura, per definizione, la velocità angolare della terna intorno ad Ox', dunque

$$Pdt = cdb + c'db' + c''db''.$$

E così restano dimostrate le altre due equazioni, e resta anche chiarito che la P misura la velocità angolare dalla terna nel senso dell'angolo $y'Oz'$, che Q la misura nel senso dell'angolo $z'Ox'$, che R la misura secondo $x'Oy'$.

Dalle equazioni

$$O = ada + a'da' + a''da''$$

$$Rdt = bda + b'da' + b''da''$$

$$-Qdt = cda + c'da' + c''da''$$

si ricavano facilmente le equazioni ben note

$$da = (bR - cQ)dt \quad , \quad da' = (b'R - c'Q)dt \quad , \quad da'' = (b''R - c''Q)dt \, , \qquad (c)$$

e da queste per mezzo della permutazione circolare delle lettere a, b, c, e P, Q, R si ricavano altre sei equazioni analoghe.

§ 2.

P, Q, R rappresentano le velocità angolari della terna $(Ox'y'z')$, rispetto alla terna $(O\,x\,y\,z)$: P, Q, R saranno dunque velocità angolari *assolute* o *relative* secondochè quest'ultima terna sarà fissa o mobile. Sia mobile, e siano p, q, r le sue velocità angolari secondo Ox, Oy, Oz: cerchiamo le velocità angolari assolute della terna $(Ox'y'z')$ le quali chiameremo P', Q', R', e s'intenderanno stimate come le P, Q, R secondo gli assi Ox', Oy', Oz'.

Consideriamo una terza terna (OXYZ) e formiamo i due schemi

$$\left.\begin{array}{cccc} & x' & y' & z' \\ x & a & b & c \\ y & a' & b' & c' \\ z & a'' & b'' & c'' \end{array}\right\} \quad (d) \qquad \left.\begin{array}{cccc} & x' & y' & z' \\ X & \alpha & \beta & \gamma \\ Y & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ Z & \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{array}\right\} \quad (e)$$

coi quali schemi sono determinate le posizioni delle terne $(Oxyz)$ ed (OXYZ) rispetto alla terza $(Ox'y'z')$. Da questi due schemi tragghiamo il terzo

$$\left.\begin{array}{cccc} & X & Y & Z \\ x & A = \alpha a + \beta b + \gamma c \;, & A' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c & A'' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c \\ y & B = \alpha a' + \beta b' + \gamma c' \;, & B' = \alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' & B'' = \alpha'' a' + \beta'' b' + \gamma'' c' \\ z & C = \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' \;, & C' = \alpha' a'' + \beta' b'' + \gamma' c'' & C'' = \alpha'' a'' + \beta'' b'' + \gamma'' c'' \end{array}\right\} \quad (f)$$

il quale schema determina la posizione reciproca delle due terne $(Oxyz)$ ed (OXYZ).

Per il significato attribuito a p, q, r ed a P', Q', R' si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} pdt = C\,dB + C'\,dB' + C''\,dB'' \;, & P'\,dt = \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' \\ qdt = A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' \;, & Q'\,dt = \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' \\ rdt = B\,dA + B'\,dA' + B''\,dA'' \;, & R'\,dt = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' \end{array}\right\} . \qquad (g)$$

Mettendo per A, B, C, A'... le funzioni indicate nel terzo schema, e giovandosi delle relazioni (b) ed analoghe, si trova

$$\left.\begin{array}{l} p = \pm[a\,(P'-P) + b'\,(Q'-Q) + c\,(R'-R)] \\ q = \pm[a'\,(P'-P) + b'\,(Q'-Q) + c'\,(R-R)] \\ r = \pm[a''(P'-P) + b''(Q'-Q) + c''(R'-R)] \end{array}\right\} \qquad (h)$$

ove vale il segno superiore o l'inferiore secondochè il determinante (d) è eguale a $+1$ o a -1. Nel primo caso gli assi Ox, Oy, Oz dell'una terna sono rispettivamente sovrapponibili agli assi Ox', Oy', Oz' dell'altra, nel secondo nol sono. Dall'equazione (h) si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} P' = P \pm (ap + a'q + a''r) \\ Q' = Q \pm (bp + b'q + b''r) \\ R' = R \pm (cp + c'q + c''r) \end{array}\right\} . \qquad (i)$$

§ 3.

Essendo i nove coefficienti $a, b, c, a' \ldots$ {eq. (7)} funzioni di $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$, posto

$$L_r = c\frac{\partial b}{\partial \lambda_r} + c'\frac{\partial b'}{\partial \lambda_r} + c''\frac{\partial b''}{\partial \lambda_r} ,$$

avremo

$$P dt = L_1 d\lambda_1 + L_2 d\lambda_2 + L_3 d\lambda_3 .$$

Essendo poi

$$b = \frac{m_2 x_1}{a_1 - \lambda_2} \;, \quad b' = \frac{m_2 x_2}{a_2 - \lambda_2} \;, \quad b'' = \frac{m_3 x_3}{a_3 - \lambda_2} ,$$

$$c = \frac{m_3 x_1}{a_1 - \lambda_3} \;, \quad c' = \frac{m_3 x_2}{a_2 - \lambda_3} \;, \quad c'' = \frac{m_3 x_3}{a_3 - \lambda_3} ,$$

risulterà

$$\frac{\partial b}{\partial \lambda_r} = \frac{\partial m_2}{\partial \lambda_r}\frac{x_1}{a_1 - \lambda_2} + \frac{m_2}{a_1 - \lambda_2}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_r} + \frac{m_2 x_1}{(a_1 - \lambda_2)^2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_r}$$

$$\frac{\partial b'}{\partial \lambda_r} = \frac{\partial m_2}{\partial \lambda_r}\frac{\partial x_2}{a_2 - \lambda_2} + \frac{m_2}{a_2 - \lambda_2}\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_r} + \frac{m_2 x_2}{(a_2 - \lambda_2)^2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_r}$$

$$\frac{\partial b''}{\partial \lambda_r} = \frac{\partial m_2}{\partial \lambda_r}\frac{\partial x_3}{a_3 - \lambda_2} + \frac{m_2}{a_3 - \lambda_2}\frac{\partial x_3}{\partial \lambda_r} + \frac{m_2 x_3}{(a_3 - \lambda_2)^2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_r}$$

perciò

$$\frac{L_r}{m_2 m_3}=\frac{\frac{x_1 \partial x_1}{\partial \lambda_r}}{(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}+\frac{\frac{x_3 \partial x_2}{\partial \lambda_r}}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_3)}+\frac{\frac{x_3 \partial x_3}{\partial \lambda_r}}{(a_3-\lambda_2)(a_3-\lambda_3)}+$$

$$+\frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_r}\left\{\frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2(a_1-\lambda_3)}+\frac{x_2^2}{(a_2-\lambda_2)^2(a_2-\lambda_3)}+\frac{x_3^2}{(a_3-\lambda_2)^2(a_3-\lambda_2)}\right\}. \qquad (k)$$

Ora differenziando logaritmicamente l'equazione $x_1^2=\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$, abbiamo

$$\frac{2\partial x_1}{x_1 \partial \lambda_r}=\frac{1}{a_1-\lambda_r} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{x_1 \partial x_1}{\partial \lambda_r}=-\frac{1}{2}\frac{x_1^2}{a_1-\lambda_r}$$

$$\sum \frac{\frac{x_1 \partial x_1}{\partial \lambda_1}}{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_3)}=-\frac{1}{2}\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}=-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=0$$

$$\sum \frac{\frac{x_1 \partial x_1}{\partial \lambda_2}}{(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}=-\frac{1}{2}\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2(a_1-\lambda_2)}$$

$$\sum \frac{\frac{x_1 \partial x_1}{\partial \lambda_3}}{(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}=-\frac{1}{2}\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_3)^2(a_1-\lambda_2)}.$$

Dunque

$$L_1=0 \quad , \quad L_2=\frac{m_2 m_3}{2}\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2(a_1-\lambda_3)} \quad L_3=-\frac{m_2 m_3}{2}\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_3)^2(a_1-\lambda_2)}.$$

Dall'equazioni (3 e 4) abbiamo

$$\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2}=\frac{1}{m_2^2}$$

$$\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)}=0,$$

e se dalla prima sottragghiamo la seconda, otteniamo

$$(\lambda_2-\lambda_3)\sum \frac{x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2(a_1-\lambda_3)}=\frac{1}{m_2^2}:$$

perciò

$$L_2=\frac{m_2 m_3}{2m_2^2(\lambda_2-\lambda_3)} \quad , \quad L_3=\frac{m_2 m_3}{2m_3^2(\lambda_2-\lambda_3)},$$

e quindi

$$P\,dt = \frac{m_1 m_3}{2(\lambda_2 - \lambda_3)} \left\{ \frac{d\lambda_2}{m_2^2} + \frac{d\lambda_3}{m_3^2} \right\}$$

$$Q\,dt = \frac{m_3 m_1}{2(\lambda_3 - \lambda_1)} \left\{ \frac{d\lambda_3}{m_3^2} + \frac{d\lambda_1}{m_1^2} \right\}$$

$$R\,dt = \frac{m_1 m_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{d\lambda_1}{m_1^2} + \frac{d\lambda_2}{m_2^2} \right\}.$$

Torino, 16 Febbraio 1877.

INDICE

INTRODUZIONE . . . . . *pag.* 1

§ 1. Generalità sulle coordinate ellittiche . . . . . » 4

§ 2. Espressioni delle velocità angolari . . . . . » 7

§ 3. Il Teorema di Poinsot. . . . . » 8

§ 4. Sezione invariabile e velocità angolare dei suoi assi . . . . . » 10

§ 5. Convenzioni . . . . . » 11

§ 6. La longitudine degli assi della sezione invariabile, e particolarità del loro movimento. » 13

§ 7. Riduzione alla forma canonica degl' integrali ellittici . . . . . » 15

§ 8. Funzioni ellittiche . . . . . » 17

§ 9. Gli assi della sezione invariabile oscillano intorno ad una retta che gira equabilmente. » 19

§ 10. Espressioni in funzione del tempo degli assi della sezione invariabile e delle componenti secondo questi assi della velocità angolare del corpo . . . . . » 21

NOTA . . . . . » 26